BAB III
MODEL OPTIMISASI PENJADWALAN PERAWAT DAN PENYELESAIANNYA MENGGUNAKAN PENDEKATAN TEKNIK *COLUMN GENERATION*

Bab ini membahas metodologi yang digunakan untuk menyelesaikan masalah penjadwalan perawat. Di awali dengan mengidentifikasi masalah dan pembangunan model optimisasi dari masalah penjadwalan perawat. Sebelum model dibangun, didefinisikan himpunan, parameter, dan variable keputusan model. Selanjutnya, model optimisasi diselesaikan dengan menggunakan teknik *column generation*.

3.1 Deskripsi Masalah

Penjadwalan perawat merupakan hal yang sangat penting bagi rumah sakit, karena perawat berhubungan langsung dengan pasien selama 24 jam. Sejauh ini, beberapa rumah sakit di Indonesia masih menggunakan cara manual dalam membuat penjadwalan perawat. Penjadwalan dengan cara manual akan menjadi rumit, membutuhkan banyak waktu, dan rentan terhadap kesalahan jika penjadwalan tersebut melibatkan jumlah perawat yang banyak.

Penjadwalan perawat di rumah sakit didefinisikan sebagai proses penempatan perawat pada periode jam kerja tertentu yang disebut *shift*selama satu minggu. Dalam satu hari terdapat tiga *shift*, yaitu *shift* pagi, *shift* siang dan *shift* malam. Setiap perawat hanya dapat bekerja maksimal satu *shift* setiap harinya. Penjadwalan yang disusun harus memenuhi peraturan penjadwalan yang berlaku di rumah sakit. Peraturan ini mengatur jumlah maksimum perawat yang bekerja dalam satu *shift*, total jam kerja maksimum dalam satu minggu, dan aturan *shift*. Pada penelitian ini, penjadwalan perawat akan melibatkan keinginan perawat dalam menyusun jadwalnya sendiri. Dengan demikian sebelum penjadwalan dimulai, setiap perawat akan memberikan jadwal yang diinginkannya dalam satu minggu. Tujuan dari penyelesaian penjadwalan perawat adalah untuk mendapatkan jadwal perawat yang optimal, yaitu jadwal perawat yang dapat memaksimumkan keinginan jadwal dari perawat dan memenuhi seluruh peraturan penjadwalan yang telah ditetapkan.

Pada penelitian ini, masalah penjadwalan perawat dapat diselesaikan dengan algoritma simpleks, namun memerlukan banyak waktu dalam pengerjaannya. Alternatif lain penyelesaian masalah ini adalah teknik *column generation*. Teknik *column generation* hanya menggunakan sebagian variabel dari masalah keseluruhan, sehingga lebih mudah menyelesaikan masalah tanpa harus menggunakan variabel yang banyak. Pada sub bab selanjutnya akan dibahas tentang model optimisasi masalah penjadwalan perawat dan cara kerja teknik *column generation* dalam menyelesaikan masalah penjadwalan perawat.

3.2 Model Optimisasi Masalah Penjadwalan Perawat

Asumsi-asumsi yang diambil pada penjadwalan perawat adalah sebagai berikut:

1. Jadwal yang dibuat adalah jadwal mingguan.
2. Semua perawat harus terjadwal.
3. Setiap perawat dapat memilih waktu shift bekerja. Pemilihan waktu tersebut dapat dipenuhi hanya jika memungkinkan.

Untuk kepentingan pembuatan model optimisasi, maka didefinisikan himpunan berikut:

1. Tipe *shift*

   Terdapat tiga tipe *shift* yaitu *shift* pagi, *shift* siang dan *shift* sore. Himpunan semua tipe *shift* dinotasikan sebagai T dengan $T = \{1,2,3\}$.
2. Slot-waktu.

   Dalam satu hari didefinisikan tiga slot-waktu di mana masing-masing slot-waktu terdiri dari durasi yang berbeda yaitu *shift* pagi tujuh jam, *shift* siang tujuh jam, dan *shift* malam sepuluh jam. Periode waktu satu hari yang digunakan adalah 24 jam. Dalam satu minggu terdapat 21 slot waktu. Himpunan semua slot-waktu dalam satu minggu dinotasikan sebagai D, dengan $D = \{1, 2, 3, \dots ,21\}$.
3. Himpunan Perawat.

   Himpunan semua perawat yang dijadwalkan dinotasikan sebagai I, dengan $I=\{1,2,3,\dots,i\}$.
4. Himpunan Pola Jadwal

Himpunan pola jadwal yang *feasible* yang ditugaskan untuk perawat i dinotasikan dengan $P(i)$, dengan $P(i) = \{1,2,3, \dots, j\}$ Pola jadwal yang *feasible* adalah jadwal yang memenuhi semua kendala penjadwalan yang ada.

Didefinisikan parameter a_{ijdt} dengan $i \in I$, $d \in D$, $t \in T$, $j \in P(i)$ sebagai jadwal perawat i yang bekerja pada pola jadwal j di tipe *shift* t pada hari d. Didefinisikan variabel keputusan x_{ij} bernilai 1 ketika perawat *i* dijadwalkan pada pola j dan bernilai 0 untuk lainnya. Variabel keputusan x_{ij} bernilai 1, ketika perawat i menggunakan pola j dan bernilai 0 untuk lainnya. Parameter lainnya yang akan digunakan pada penjadwalan perawat adalah sebagai berikut:

1. Durasi *shift*.

   Untuk setiap *shift* memiliki durasi yang berbeda. Untuk *shift* pagi dilaksanakan pada jam 07.00-14.00 (7 jam), *shift* siang dilaksanakan pada jam 14.00-21.00 (7 jam) dan *shift* malam dilaksanakan pada jam 21.00-07.00 (10 jam). Durasi untuk *shift t* dinotasikan dengan l_t, $t \in T$.
2. Jumlah jam kerja perawat.

   Dalam satu minggu perawat dapat bekerja maksimal 48 jam.
3. Jumlah perawat yang ditugaskan pada setiap *shift*.

   Dalam satu hari terdiri dari tiga *shift*, setiap *shift t* dalam satu hari dibutuhkan empat sampai lima perawat untuk bertugas. Jumlah perawat yang ditugaskan pada *shift t* di hari *d* dinotasikan dengan s_{dt}.

Setiap perawat dibolehkan untuk memilih sendiri slot-waktu untuk jadwal yang diinginkannya. Untuk itu didefinisikan parameter p_{idt} yang menyatakan pemilihan jadwal kerja oleh perawat *i* untuk mengambil *shift t* di hari *d*. Nilai parameter p_{idt} adalah 0, 1, atau 2 untuk suatu slot waktu tertentu. $p_{idt} = 0$ jika perawat *i* tidak berkeinginan mengambil *shift t* di hari d, $p_{idt} = 1$ jika perawat *i* menyatakan bisa untuk mengambil *shift t* di hari d, $p_{idt} = 2$ jika perawat *i* sangat berkeinginan mengambil *shift t* di hari *d*. Pada penelitian ini, penjadwalan disusun untuk memaksimumkan kepuasan perawat akan permintaan jadwal mereka. Oleh karena itu, fungsi tujuan dari model optimisasi adalah untuk memaksimumkan total nilai kepuasan dari seluruh perawat, yaitu:

Maksimumkan:

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in Pi}(\sum_{d\in D}\sum_{t\in T} p_{idt}\, a_{ijdt})x_{ij}$$

Adapun kendala-kendala dalam model optimisasi penjadwalan perawat adalah sebagai berikut:

1. Dalam satu hari perawat *i* bekerja hanya satu *shift* saja. Kendala ini dinyatakan sebagai persamaan:

   $$\sum_{j\in Pi} x_{ij} = 1,\ \forall i\ \in I$$

2. Setiap perawat yang ditugaskan pada *shift* malam tidak boleh ditugaskan pada *shift* pagi atau *shift* sore pada hari berikutnya dan setiap perawat yang bertugas pada *shift* sore sebaiknya tidak ditugaskan pada *shift* pagi di hari berikutnya, maka diperoleh tiga pertidaksamaan :
   a. Perawat yang dijadwalkan *shift* malam pada hari *d*, maka keesokan harinya (*d*+1) tidak boleh *shift* pagi. Kendala ini dinyatakan sebagai pertidaksamaan:

      $$a_{ijd3}x_{ij} + a_{ij(d+1)1}x_{ij} \leq 1,\quad \forall \mathrm{i}\ \in I, d \in 1..h-1, j \in P_i$$

   b. Perawat yang dijadwalkan *shift* malam pada hari *d*, maka keesokan harinya (*d*+1) tidak boleh *shift* siang. Kendala ini dinyatakan sebagai pertidaksamaan :

      $$a_{ijd3}x_{ij} + a_{ij(d+1)2}x_{ij} \leq 1,\quad \forall \mathrm{i}\ \in I, d \in 1..h-1, j \in P_i$$

   c. Perawat yang dijadwalkan *shift* siang pada hari *d*, maka keesokan harinya (*d*+1) tidak boleh *shift* pagi. Kendala ini dinyatakan sebagai pertidaksamaan:

      $$a_{ijd2}x_{ij} + a_{ij(d+1)1}x_{ij} \leq 1, \forall \mathrm{i}\ \in I, d \in 1..h-1, j \in P_i$$

3. Total perawat yang bertugas untuk setiap *shift* dalam satu hari. Dalam satu hari, jumlah total perawat *i* yang bekerja pada *shift t* sebanyak s_{dt}. Kendala ini dapat dinyatakan sebagai persamaan berikut:

   $$\sum_{i\in I}\sum_{J\in Pi} a_{ijdt}x_{ij} = s_{dt},\ \forall d \in D, t \in T$$

4. Total waktu kerja maksimum setiap perawat dalam satu minggu. Dalam satu minggu, jumlah total jam kerja l_t perawat *i* pada *shift t* di hari *d* tidak lebih dari 48 jam. Kendala ini dapat dinyatakan sebagai persamaan:

   $$\sum_{d\in D}\sum_{t\in T} l_t\, a_{ijdt}x_{ij} \leq 48,\ \forall i \in I, j\ \in P_i$$

Selengkapnya, model optimisasi masalah penjadwalan perawat adalah sebagai berikut:

Maksimumkan: $\sum_{i\in I}\sum_{j\in Pi}(\sum_{d\in D}\sum_{t\in T} p_{idt}\, a_{ijdt})x_{ij}$ (3.1)

Terhadap: $\sum_{j\in Pi} x_{ij} = 1,\ \forall i\ \in I$ (3.2)

$a_{ijd3}x_{ij} + a_{ij(d+1)1}x_{ij} \leq 1, \forall \mathrm{i}\ \in I, d \in 1..h-1, j \in P_i$ (3.3)

$a_{ijd3}x_{ij} + a_{ij(d+1)2}x_{ij} \leq 1, \forall \mathrm{i}\ \in I, d \in 1..h-1, j \in P_i$ (3.4)

$a_{ijd2}x_{ij} + a_{ij(d+1)1}x_{ij} \leq 1, \forall \mathrm{i}\ \in I, d \in 1..h-1, j \in P_i$ (3.5)

$\sum_{i\in I}\sum_{J\in Pi} a_{ijdt}x_{ij} = s_{dt},\ \forall d\ \in D, t \in T$ (3.6)

$\sum_{d\in D}\sum_{t\in T} l_t\, a_{ijdt}x_{ij} \leq 48,\ \forall i \in I, j\ \in P_i$ (3.7)

$x_{ij}\ \in \{0,1\}$ (3.8)

Model optimisasi tersebut termasuk dalam kategori model integer linear programming (ILP). Pada penelitian ini, model tersebut akan diselesaikan dengan pendekatan *column generation* dan akan dijelaskan pada subbab selanjutnya.

3.3 Pendekatan Teknik *Column Generation* pada Penyelesaian Masalah Penjadwalan Perawat

Teknik *column generation* pertama kali digunakan oleh Gilmore dan Gomory dalam penyelesaian *cutting stock problem* satu dimensi (Lubbecke, M.E & J. Desrosiers, 2002). Ide *column generation* adalah cukup dengan menggunakan subhimpunan dari himpunan kolom yang besar dalam menyelesaikan masalah, kemudian kolom baru ditambahkan ke dalam subhimpunan tersebut hanya saat diperlukan, yaitu ketika variabel yang bersesuaian dengan kolom tersebut berpotensi mengoptimalkan fungsi tujuan.

Masalah penjadwalan perawat melibatkan sejumlah ruangan dan slot-waktu, di mana setiap perawat mempunyai pola penjadwalan yang sangat beragam, sehingga terdapat sejumlah besar kombinasi yang mungkin untuk membuat suatu jadwal. Dengan kata lain, model ILP di atas melibatkan jumlah kolom yang besar, sehingga diperlukan teknik *column generation* untuk menyelesaikan masalah tersebut.

Langkah pertama teknik *column generation* adalah membagi masalah menjadi dua bagian, yaitu *master problem* dan *sub problem* (*pricing problem*). *Master problem* adalah induk permasalahan yang akan diselesaikan. Sedangkan s*ubproblem* adalah subhimpunan dari himpunan kolom yang besar di dalam *master problem.* Dalam penyelesaian masalah ILP, *master problem* digunakan untuk memilih suatu jadwal yang mungkin dan *feasible* yang telah diketahui untuk setiap perawat, sedangkan *subproblem* digunakan untuk mendapatkan suatu jadwal yang baru untuk memperbaiki solusi dari masalah ILP.

3.3.1 Master Problem

ILP merupakan model program linier dengan persyaratan tambahan yaitu beberapa atau semua variabel keputusan harus merupakan bilangan bulat. Penggunaan variabel bilangan bulat memberikan tambahan fleksibilitas dalam pembuatan model (Anderson, Sweeney, dan Williams, 1994: 316). Model pemrograman bulat dapat juga digunakan untuk memecahkan masalah dengan jawaban ya atau tidak (*yes or no decision*). Untuk model ini variabel dibatasi menjadi dua, misal 1 dan 0, jadi keputusan ya atau tidak diwakili oleh variabel.

Langkah awal dalam menyelesaikan masalah ILP atau inisialisasi teknik *column generation* adalah membentuk *restricted master problem* (RMP) yaitu masalah ILP yang hanya menggunakan subhimpunan J', dengan $J' \subset J$, di mana J adalah himpunan semua jadwal perawat yang layak. Salah satu cara dalam membentuk RMP adalah dengan memilih secara acak kolom yang mungkin mengoptimalkan fungsi tujuan. Sehingga didapat RMP untuk masalah ini adalah:

Maksimumkan: $$\sum_{i \in I} \sum_{j \in Pi} \left(\sum_{d \in D} \sum_{t \in T} p_{idt}\, a_{ijdt} \right) x_{ij} \quad (3.9)$$

Terhadap: $$\sum_{j \in Pi} x_{ij} = 1, \ \forall i \in I \quad (3.10)$$

$$a_{ijd3} x_{ij} + a_{ij(d+1)1} x_{ij} \le 1, \quad \forall \text{i} \in I, \text{d} \in 1..h-1, j \in P_i \quad (3.11)$$

$$a_{ijd3} x_{ij} + a_{ij(d+1)2} x_{ij} \le 1, \quad \forall \text{i} \in I, \text{d} \in 1..h-1, j \in P_i \quad (3.12)$$

$$a_{ijd2} x_{ij} + a_{ij(d+1)1} x_{ij} \le 1, \quad \forall \text{i} \in I, \text{d} \in 1..h-1, j \in P_i \quad (3.13)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{J \in Pi} a_{ijdt} x_{ij} = s_{dt}, \quad \forall d \in D, t \in T \quad (3.14)$$

$$\sum_{d \in D} \sum_{t \in T} l_t\, a_{ijdt} x_{ij} \le 48, \quad \forall i \in I, j \in P_i \quad (3.15)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \quad j \in J' \quad (3.16)$$

Selanjutnya membantuk LP relaksasi dari bentuk masalah RMP tersebut dengan mengganti kendala (3.16) menjadi $0 \leq x_{ij} \leq 1$. RMP tersebut selanjutnya diselesaikan dengan metode simpleks untuk mendapatkan solusi *dual*.

Pada saat keadaan optimal dicapai di RMP yaitu di himpunan J', selanjutnya akan diperiksa apakah keadaan optimal tersebut berlaku juga untuk *master problem*, yaitu dengan cara meyelesaikan *subproblem* yang akan dijelaskan pada subab berikut.

3.3.2 Sub Problem

Karena masalah awal terlalu besar untuk diselesaikan secara langsung, maka masalah awal akan dibagi menjadi sub-sub masalah sampai submasalah-sub masalah tersebut dapat diabaikan. Proses pembagian dilakukan dengan membagi daerah *feasible* masalah awal menjadi daerah-daerah *feasible* yang lebih kecil. Langkah-langkah dalam menentukan *subproblem* adalah sebagai berikut:

1. Mendefinisikan variabel *dual* yaitu u_i, e_{idj}, f_{idj}, g_{idj}, v_{dt},w_{ij} untuk kendala (3.10) sampai (3.15) secara berurutan, sehingga diperoleh permasalahan *dual*:

$$\begin{aligned} u_i + a_{ijd3}e_{idj} + a_{ij(d+1)1}e_{idj} + a_{ijd3}f_{idj} + a_{ij(d+1)2}f_{idj} \\ + a_{ijd2}g_{idj} + a_{ij(d+1)1}g_{idj} \\ + \sum_{d\in D}\sum_{t\in T} a_{ijdt}v_{dt} + \sum_{i\in I}\sum_{j\in S_i} a_{ijdt}w_{ij} \\ \geq \sum_{d\in D}\sum_{t\in T} p_{idt}a_{ijdt}\ , j\ \in P_i\ , i\ \in I \end{aligned} \quad (3.17)$$

atau

$$\begin{aligned} u_i + a_{ijd3}(e_{idj} + f_{idj}) + a_{ij(d+1)1}(e_{idj} + g_{idj}) + a_{ij(d+1)2}f_{idj} \\ + a_{ijd2}g_{idj} + \sum_{d\in D}\sum_{t\in T}\left(a_{ijdt}\,(v_{dt} - p_{idt})\right) \\ + \sum_{i\in I}\sum_{j\in S_i} a_{ijdt}w_{ij} \geq 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

2. Untuk memilih variabel masuk dari luar J', yaitu pola penjadwalan yang tidak terdapat di J', akan dimaksimumkan persamaan (3.18) terhadap a.

   Misal didefinisikan:

$$\sum_{d\in D}\sum_{t\in T}\left(a_{ijdt}\,(v_{dt} - p_{idt})\right) \quad (3.19)$$

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in S_i} a_{ijdt}w_{ij} \quad (3.20)$$

maka meminimumkan (3.19) sama dengan meminimumkan $(v_{dt} - p_{idt})$ dan meminimumkan (3.20) sama dengan meminimumkan $\sum_{i\in I}\sum_{j\in S_i} w_{ij}$. Dimisalkan pula didefinisikan

$$\dot{v}_{dt} = \min v_{dt} - p_{idt}$$

$$\dot{w}_{dt} = \sum_{i\in I}\sum_{j\in S_i} w_{ij}$$

dan

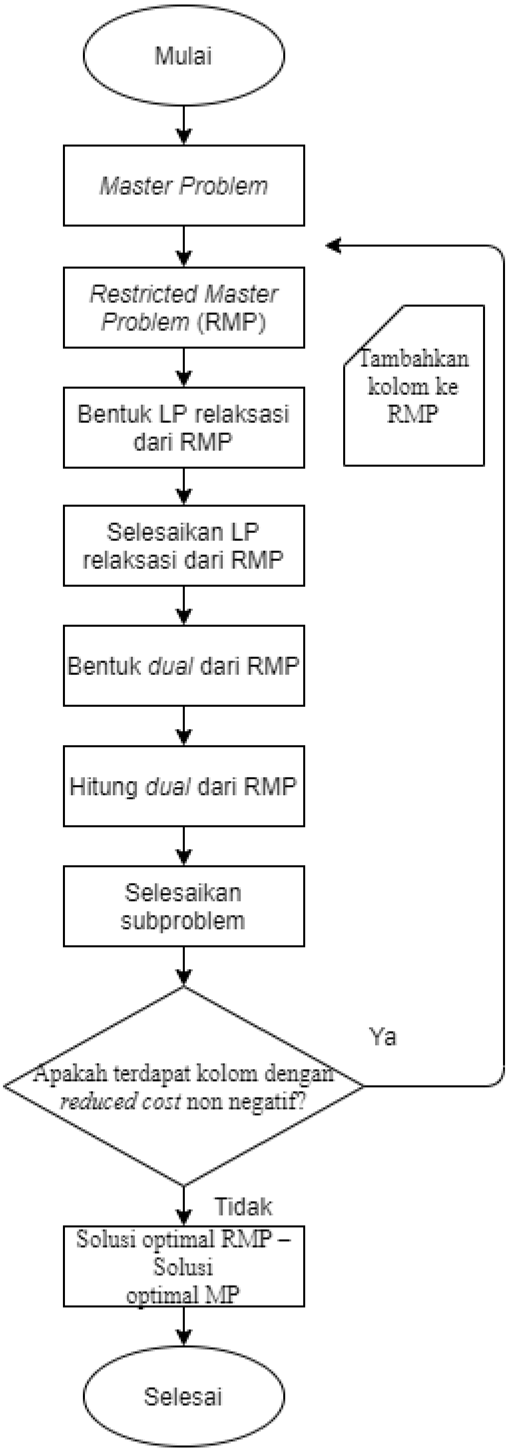
$$z_{dt} = \dot{v}_{dt} + \dot{w}_{dt}$$

maka meminimumkan (3.19) dan (3.20) ekivalen dengan meminimumkan:

$$\sum_{d\in D}\sum_{t\in T}\left(z_{dt}a_{ijdt}\right) \quad (3.21)$$

3. Misalkan nilai maksimum dari persamaan (3.21) adalah M_c. Jika $Mc + u_c < 0$ maka kondisi optimal untuk J' belum optimal untuk *master problem* untuk perawat *i*, sehingga pola yang didapatkan dari meminimumkan (3.21) dimasukkan ke RMP. Sebaliknya jika $Mc + u_c \geq 0$ maka kondisi optimal untuk J' sudah optimal untuk *master problem* untuk perawat *i*.

Setelah subproblem diselesaikan dan diperoleh solusi RMP yang didapat bukan bilangan bulat, maka metode *branch and bound* digunakan untuk memperoleh solusi bilangan bulat. Di tiap *node* dari *tree branch and bound* dilakukan proses *column generation* dimulai dari *node* awal, untuk memberikan batas valid yang digunakan untuk fathoming. Berdasarkan penjelasan tersebut, maka cara kerja teknik *column generation* dapat digambarkan dalam *flowchart* pada Gambar 3.1.



Gambar 3. 1 *Flowchart Column Generation*

Berikut ini akan diberikan contoh sederhana masalah penjadwalan perawat dengan pendekatan *column generation*. Misalkan akan dijadwalkan 3 perawat jaga dalam dua hari di mana untuk satu hari terdiri dari tiga *shift* yaitu pagi, siang, malam. Durasi untuk *shift t* dinotasikan dengan l_t masing-masing adalah l_1=7, l_2=7, l_3=10. Setiap *shift* pagi dalam satu hari *d* dibutuhkan satu perawat untuk bertugas, dinotasikan dengan s_{d1}= 1, *shift* siang dalam satu hari *d* dibutuhkan satu perawat untuk bertugas, dinotasikan dengan s_{d2}= 1, dan *shift* malam dalam satu hari *d* dibutuhkan satu perawat untuk bertugas, dinotasikan dengan s_{d3}= 1. Dalam dua hari perawat dapat bekerja maksimal 10 jam.

Tabel 3.1 Nilai Pemilihan Slot-Waktu oleh Perawat

Shift	**Perawat 1,2,3**
Senin	
07.00-14.00	2 0 0
14.00-21.00	0 1 2
21.00-07.00	1 2 1
Selasa	
07.00-14.00	1 1 1
14.00-21.00	2 0 1
21.00-07.00	0 2 0

Sebagai ilustrasi, akan digambarkan beberapa pola penjadwalan perawat seperti pada Tabel 3.2. Berdasarkan data tersebut diperoleh model matematikanya sebagai berikut:

Maksimumkan:

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{6}\left(\sum_{d=1}^{6}\sum_{t=1}^{3} p_{idt}a_{ijdt}\right)x_{ij} \tag{3.22}$$

Jika dijabarkan menjadi

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{6}\big(p_{i11}a_{ij11} + p_{i12}a_{ij12} + p_{i13}a_{ij13} + p_{i14}a_{ij14} + p_{i15}a_{ij15} + p_{i16}a_{ij16} + \cdots + p_{i61}a_{ij61} + p_{i62}a_{i62} + p_{i63}a_{i63} + p_{i64}a_{ij64} + p_{i65}a_{ij65} + p_{i66}a_{ij66}\big)\,x_{ij} \quad (3.23)$$

atau

$$_{11} + p_{i21}a_{ij21} + p_{i31}a_{ij31} + p_{i41}a_{ij41} + p_{i51}a_{ij51} + p_{i61}a_{ij61} + p_{i71}a_{ij71} + \cdots + p_{i13}a_{ij13} + p_{i23}a_{i23} + p_{i33}a_{i33} + p_{i43}a_{ij43} + p_{i53}a_{ij53} + p_{i63}a_{ij63} + p_{i73}a_{ij73}\big)x_{a1} + \cdots + (p_{a11}a_{a611} + p_{a12}a_{a612} + p_{a13}a_{a613} + p_{a14}a_{a614} + p_{a15}a_{a615} + p_{a16}a_{a616} + \cdots + p_{a61}a_{a661} + p_{a62}a_{a662} + p_{a63}a_{a663} + p_{a64}a_{a664} + p_{a65}a_{a665} + p_{a66}a_{a666})x_{a6}\big) + \cdots + \big((p_{c11}a_{c111} + p_{c12}a_{c112} + p_{c13}a_{c113} + p_{c14}a_{c114} + p_{c15}a_{c115} + p_{c16}a_{c116} + \cdots + p_{c61}a_{c161} + p_{c62}a_{c162} + p_{c63}a_{c163} + p_{c64}a_{c164} + p_{c65}a_{c165} + p_{c66}a_{c166})x_{c1} + \cdots + (p_{c11}a_{c611} + p_{c12}a_{c612} + p_{c13}a_{c613} + p_{c14}a_{c614} + p_{c15}a_{c615} + p_{c16}a_{c616} + \cdots + p_{c61}a_{c661} + p_{c62}a_{c662} + p_{c63}a_{c663} + p_{c64}a_{c664} + p_{c65}a_{c665} + p_{c66}a_{c666})x_{c6}\big) \quad (3.23)$$

Tabel 3. 2 Pola Penjadwalan Perawat

Shift		Pola 1	Pola 2	Pola 3	Pola 4	Pola 5	Pola 6
Senin	P	1	1	1	1	1	1
	S	2	2	2	2	2	2
	M	3	3	3	3	3	3
Selasa	P	4	4	4	4	4	4
	S	5	5	5	5	5	5
	M	6	6	6	6	6	6

Dengan menerapkan aturan a_{ijdt} dengan nilai pemilihan tiap perawat seperti Tabel 3.1, maka didapatkan perhitungan sebagai berikut:

Maksimumkan $(3x_{a1}+4x_{a2}+2x_{a3}+2x_{a4}+0x_{a5}+x_{a6})+(x_{b1}+0x_{b2}+2x_{b3}+x_{b4}+3x_{b5}+4x_{b6})+(x_{c1}+x_{c2}+0x_{c3}+3x_{c4}+2x_{c5}+x_{c6})$

Adapun kendalan-kendala dari model adalah sebagai berikut:

Kendala 3.10:

$$\sum_{j=1}^{6} x_{ij} = 1\,, i = a, b, c$$

diperoleh

$$x_{i1}+x_{i2}+x_{i3}+x_{i4}+x_{i5}+x_{i6}=1$$

Untuk i = a,

$$x_{a1}+x_{a2}+x_{a3}+x_{a4}+x_{a5}+x_{a6}=1$$

Untuk i = b,

$$x_{b1}+x_{b2}+x_{b3}+x_{b4}+x_{b5}+x_{b6}=1$$

Untuk i = c,

$$x_{c1}+x_{c2}+x_{c3}+x_{c4}+x_{c5}+x_{c6}=1$$

Kendala 3.11:

$$a_{ijd3}x_{ij}+a_{ij(d+1)1}x_{ij}\leq 1, i=1,2,\dots,3;\ d=1,2,\dots,5;\ j=1,2,\dots,6$$

Untuk i=a,d=1,j=1 sampai 6,

$$a_{a113}x_{a1}+a_{a121}x_{a1}\leq 1$$

$$\dots$$

$$a_{a613}x_{a6}+a_{a621}x_{a6}\leq 1$$

Untuk i=a, d=2,j=1 sampai 6,

$$a_{a123}x_{a1}+a_{a131}x_{a1}\leq 1$$

$$\dots$$

$$a_{a623}x_{a6}+a_{a631}x_{a1}\leq 1$$

Untuk i=a, d=3,j=1 sampai 6,

$$a_{a133}x_{a1}+a_{a141}x_{a1}\leq 1$$

$$\dots$$

$$a_{a633}x_{a6}+a_{a641}x_{a6}\leq 1$$

Untuk i=a, d=4, j=1 sampai 6,

$$a_{a143}x_{a1}+a_{a151}x_{a1}\leq 1$$

$$\dots$$

$$a_{a643}x_{a6} + a_{a651}x_{a6} \leq 1$$

Untuk i=a, d=5, j=1 sampai 6,

$$a_{a153}x_{a1} + a_{a161}x_{a1} \leq 1$$

$$\dots$$

$$a_{a653}x_{a6} + a_{a661}x_{a6} \leq 1$$

Untuk i=b, d =1,j=1 sampai 6,

$$a_{b113}x_{b1} + a_{b121}x_{b1} \leq 1$$

$$\dots$$

$$a_{b613}x_{b6} + a_{b621}x_{b6} \leq 1$$

Untuk i=b, d=2,j=1 sampai 6,

$$a_{b123}x_{b1} + a_{b131}x_{b1} \leq 1$$

$$\dots$$

$$a_{b623}x_{b6} + a_{b631}x_{b6} \leq 1$$

Untuk i=b, d=3, j=1 sampai 6,

$$a_{b133}x_{b1} + a_{b141}x_{b1} \leq 1$$

$$\dots$$

$$a_{b633}x_{a6} + a_{b641}x_{b6} \leq 1$$

Untuk i=b, d=4,j=1 sampai 6,

$$a_{b143}x_{b1} + a_{b151}x_{b1} \leq 1$$

$$\dots$$

$$a_{b643}x_{b6} + a_{b651}x_{b6} \leq 1$$

Untuk i=b, d=5,j=1 sampai 6,

$$a_{b153}x_{b1} + a_{b161}x_{b1} \leq 1$$

$$\dots$$

$$a_{b653}x_{b6} + a_{b661}x_{b6} \leq 1$$

Untuk i=c, d=1,j=1 sampai 6,

$$a_{c113}x_{c1} + a_{c121}x_{c1} \leq 1$$

$$\dots$$

$$a_{c613}x_{c6} + a_{c621}x_{c6} \leq 1$$

Untuk i=c, d=2,j=1 sampai 6,

$$a_{c123}x_{c1} + a_{c131}x_{c1} \leq 1$$

$$\dots$$

$$a_{c623}x_{c6} + a_{c631}x_{c6} \leq 1$$

Untuk i=c, d=3,j=1 sampai 6,

$$a_{c133}x_{c1} + a_{c141}x_{c1} \leq 1$$

$$\dots$$

$$a_{c633}x_{c6} + a_{c641}x_{c6} \leq 1$$

Untuk i=c, d=4,j=1 sampai 6,

$$a_{c143}x_{c1} + a_{c151}x_{c1} \leq 1$$

$$\dots$$

$$a_{c643}x_{c6} + a_{c651}x_{c6} \leq 1$$

Untuk i=c, d=5,j=1 sampai 6,

$$a_{c153}x_{c1} + a_{c161}x_{c1} \leq 1$$

$$\dots$$

$$a_{c653}x_{c6} + a_{c661}x_{c6} \leq 1$$

Kendala 3.12:

$$a_{ijd3}x_{ij} + a_{ij(d+1)2}x_{ij} \leq 1, i = 1{,}2{,}3;\ d = 1, \dots, 5; j = 1, \dots 6$$

Untuk i=a, d=1,j=1 sampai 6,

$$a_{a113}x_{a1} + a_{a122}x_{a1} \leq 1$$

$$\dots$$

$$a_{a613}x_{a1} + a_{a622}x_{a1} \leq 1$$

Untuk i=a, d=2, j=1 sampai 6,

$$a_{a123}x_{a1} + a_{a132}x_{a1} \leq 1$$

$$\dots$$

$$a_{a623}x_{a1} + a_{a632}x_{a1} \leq 1$$

Untuk i=a, d=3,j=1 sampai 6,

$$a_{a133}x_{a1} + a_{a142}x_{a1} \leq 1$$

$$\dots$$

$$a_{a633}x_{a1} + a_{a642}x_{a1} \leq 1$$

Untuk i=a, d=4, j=1 sampai 6,

$$a_{a143}x_{a1} + a_{a152}x_{a1} \leq 1$$

$$\dots$$

$$a_{a643}x_{a1} + a_{a652}x_{a1} \leq 1$$

Untuk i=a, d=5, j=1 sampai 6,

$$a_{a153}x_{a1} + a_{a162}x_{a1} \leq 1$$

$$\dots$$

$$a_{a653}x_{a1} + a_{a662}x_{a1} \leq 1$$

Untuk i=b, d=1, j=1 sampai 6,

$$a_{b113}x_{b1} + a_{b122}x_{b1} \leq 1$$

$$\dots$$

$$a_{b613}x_{b1} + a_{b622}x_{b1} \leq 1$$

Untuk i=b, d=2, j=1 sampai 6,

$$a_{b123}x_{b1} + a_{b132}x_{b1} \leq 1$$

$$\dots$$

$$a_{b623}x_{b1} + a_{b632}x_{b1} \leq 1$$

Untuk i=b, d=3, j=1 sampai 6,

$$a_{b133}x_{b1} + a_{b142}x_{b1} \leq 1$$

$$\dots$$

$$a_{b633}x_{a1} + a_{b642}x_{b1} \leq 1$$

Untuk i=b, d=4, j=1 sampai 6,

$$a_{b143}x_{b1} + a_{b152}x_{b1} \leq 1$$

$$\dots$$

$$a_{b643}x_{b1} + a_{b652}x_{b1} \leq 1$$

Untuk i=b, d=5, j=1 sampai 6,

$$a_{b153}x_{b1} + a_{b162}x_{b1} \leq 1$$

$$\dots$$

$$a_{b653}x_{b1} + a_{b662}x_{b1} \leq 1$$

Untuk i=c, d=1, j=1 sampai 6,

$$a_{c113}x_{c1} + a_{c122}x_{c1} \leq 1$$

$$\dots$$

$$a_{c613}x_{c1} + a_{c622}x_{c1} \leq 1$$

Untuk i=c, d=2, j=1 sampai 6,

$$a_{c123}x_{c1} + a_{c132}x_{c1} \leq 1$$

$$\dots$$

$$a_{c623}x_{c1} + a_{c632}x_{c1} \leq 1$$

Untuk i=c, d=3, j=1 sampai 6,

$$a_{c133}x_{c1} + a_{c142}x_{c1} \leq 1$$

$$\dots$$

$$a_{c633}x_{c1} + a_{c642}x_{c1} \leq 1$$

Untuk i=c, d=4, j=1 sampai 6,

$$a_{c143}x_{c1} + a_{c152}x_{c1} \leq 1$$

$$\dots$$

$$a_{c643}x_{c1} + a_{c652}x_{c1} \leq 1$$

Untuk i=c, d=5, j=1 sampai 6,

$$a_{c153}x_{c1} + a_{c162}x_{c1} \leq 1$$

$$\dots$$

$$a_{c653}x_{c1} + a_{c662}x_{c1} \leq 1$$

Kendala 3.13:

$$a_{ijd2}x_{ij} + a_{ij(d+1)1}x_{ij} \leq 1, i = 1,2,3;\ d = 1, \dots, 5; j = 1, \dots, 6$$

Untuk i=a, d=1, j=1 sampai 6,

$$a_{a112}x_{a1} + a_{a121}x_{a1} \leq 1$$

$$\dots$$

$$a_{a612}x_{a1} + a_{a621}x_{a1} \leq 1$$

Untuk i=a, d=2, j=1 sampai 6,

$$a_{a122}x_{a1} + a_{a131}x_{a1} \leq 1$$

$$\dots$$

$$a_{a622}x_{a1} + a_{a631}x_{a1} \leq 1$$

Untuk i=a,d=3,j=1 sampai 6

$$a_{a132}x_{a1} + a_{a141}x_{a1} \leq 1$$

$$\dots$$

$$a_{a632}x_{a1} + a_{a641}x_{a1} \leq 1$$

Untuk i=a, d=4, j=1 sampai 6,

$$a_{a142}x_{a1} + a_{a151}x_{a1} \leq 1$$

$$\dots$$

$$a_{a642}x_{a1} + a_{a651}x_{a1} \leq 1$$

Untuk i=a, d=5, j=1 sampai 6,

$$a_{a152}x_{a1} + a_{a161}x_{a1} \leq 1$$

$$\dots$$

$$a_{a652}x_{a1} + a_{a661}x_{a1} \leq 1$$

Untuk i=b, d=1, j=1 sampai 6,

$$a_{b112}x_{b1} + a_{b121}x_{b1} \leq 1$$

$$\dots$$

$$a_{b612}x_{b1} + a_{b621}x_{b1} \leq 1$$

Untuk i=b, d=2, j=1 sampai 6,

$$a_{b122}x_{b1} + a_{b131}x_{b1} \leq 1$$

$$\dots$$

$$a_{b622}x_{b1} + a_{b631}x_{b1} \leq 1$$

Untuk i=b, d=3, j=1 sampai 6,

$$a_{b132}x_{b1} + a_{b141}x_{b1} \leq 1$$

$$\dots$$

$$a_{b632}x_{a1} + a_{b641}x_{b1} \leq 1$$

Untuk i=b, d=4, j=1 sampai 6,

$$a_{b142}x_{b1} + a_{b151}x_{b1} \leq 1$$

$$\dots$$

$$a_{b642}x_{b1} + a_{b651}x_{b1} \leq 1$$

Untuk i=b, d=5, j=1 sampai 6,

$$a_{b152}x_{b1} + a_{b161}x_{b1} \leq 1$$

$$\dots$$

$$a_{b652}x_{b1} + a_{b661}x_{b1} \leq 1$$

Untuk i=c, d=1, j=1 sampai 6,

$$a_{c112}x_{c1} + a_{c121}x_{c1} \leq 1$$

$$\dots$$

$$a_{c612}x_{c1} + a_{c621}x_{c1} \leq 1$$

Untuk i=c, d=2, j=1 sampai 6,

$$a_{c122}x_{c1} + a_{c131}x_{c1} \leq 1$$

$$\dots$$

$$a_{c622}x_{c1} + a_{c631}x_{c1} \leq 1$$

Untuk i=c, d=3, j=1 sampai 6,

$$a_{c132}x_{c1} + a_{c141}x_{c1} \leq 1$$

$$\dots$$

$$a_{c632}x_{c1} + a_{c641}x_{c1} \leq 1$$

Untuk i=c, d=4, j=1 sampai 6,

$$a_{c142}x_{c1} + a_{c151}x_{c1} \leq 1$$

$$\dots$$

$$a_{c642}x_{c1} + a_{c651}x_{c1} \leq 1$$

Untuk i=c, d=5, j=1 sampai 6,

$$a_{c152}x_{c1} + a_{c161}x_{c1} \leq 1$$

$$\dots$$

$$a_{c652}x_{c1} + a_{c661}x_{c1} \leq 1$$

Kendala 3.14:

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{6} a_{ijd1}x_{ij} = 1, d = 1, \dots, 6; t = 1,2,3$$

Untuk d = 1,2,3,4,5,6 dan t = 1,2,3

$$(a_{a1dt}x_{a1} + \cdots + a_{a6dt}x_{a6}) + (a_{b1dt}x_{b1} + \cdots + a_{b6dt}x_{b6}) + (a_{c1dt}x_{c1} + \cdots + a_{c6dt}x_{c6}) = 1$$

Untuk d=1, t=1,

$$(a_{a111}x_{a1} + \cdots + a_{a611}x_{a6}) + (a_{b111}x_{b1} + \cdots + a_{b611}x_{b6}) + (a_{c111}x_{c1} + \cdots + a_{c611}x_{c6})$$

$$x_{a1} + x_{b1} + x_{c1} = 1$$

Untuk d=2, t=1,

$$x_{a2} + x_{b2} + x_{c2} = 1$$

Untuk d=3, t=1,

$$x_{a3} + x_{b3} + x_{c3} = 1$$

Untuk d=4, t=1,

$$x_{a4} + x_{b4} + x_{c4} = 1$$

Untuk d=5, t=1,

$$x_{a5} + x_{b5} + x_{c5} = 1$$

Untuk d=6, t=1,

$$x_{a6} + x_{b6} + x_{c6} = 1$$

Untuk d=1, t=2,

$$x_{a1} + x_{b2} + x_{c1} = 1$$

Untuk d=2, t=2,

$$x_{a2} + x_{b4} + x_{c2} = 1$$

Untuk d=3, t=2,

$$x_{a3} + x_{b6} + x_{c3} = 1$$

Untuk d=4, t=2,

$$x_{a4} + x_{b3} + x_{c4} = 1$$

Untuk d=5, t=2,

$$x_{a5} + x_{b1} + x_{c5} = 1$$

Untuk d=6, t=2,

$$x_{a6} + x_{b5} + x_{c6} = 1$$

Untuk d=1, t=3,

$$x_{a3} + x_{b1} + x_{c3} = 1$$

Untuk d=2, t=3,

$$x_{a1} + x_{b6} + x_{c1} = 1$$

Untuk d=3, t=3,

$$x_{a2} + x_{b3} + x_{c2} = 1$$

Untuk d=4, t=3,

$$x_{a3} + x_{b1} + x_{c3} = 1$$

Untuk d=5, t=3,

$$x_{a4} + x_{b5} + x_{c4} = 1$$

Untuk d=6, t=3,

$$x_{a6} + x_{b2} + x_{c6} = 1$$

Kendala 3.15:

$$\sum_{d=1}^{6}\sum_{t=1}^{3} l_t\, a_{ijdt}\, x_{ij} \leq 20, i = 1,2,3; j = 1, \dots, 6$$

$$\left(\left(l_1 a_{ij11} x_{ij} + \cdots + l_3 a_{ij13} x_{ij}\right) + \cdots + \left(l_1 a_{ij61} x_{ij} + \cdots + l_3 a_{ij63} x_{ij}\right)\right) \leq 20$$

Untuk i=a, j=1,

$$\left((l_1 a_{a111} x_{a1} + \cdots + l_3 a_{a113} x_{a1}) + \cdots + (l_1 a_{a161} x_{a1} + \cdots + l_3 a_{a163} x_{a1})\right) \leq 20$$

$$7x_{a1} + 7x_{a1} \leq 10$$

Untuk i=a, j=2,

$$7x_{a2} + 7x_{a2} \leq 10$$

Untuk i=a, j=3,

$$7x_{a3} + 10x_{a3} \leq 10$$

Untuk i=a, j=4,

$$7x_{a4} + 7x_{a4} \leq 10$$

Untuk i=a, j=5,

$$7x_{a5} + 10x_{a5} \leq 10$$

Untuk i=a, j=6,

$$10x_{a6} + 10x_{a6} \leq 10$$

Untuk i=b, j=1,

$$7x_{b1} + 7x_{b1} \leq 10$$

Untuk i=b, j=2,

$$7x_{b2} + 7x_{b2} \leq 10$$

Untuk i=b, j=3,

$$7x_{b3} + 10x_{b3} \leq 10$$

Untuk i=b, j=4,

$$7x_{b4} + 7x_{b4} \leq 10$$

Untuk i=b, j=5,

$$7x_{b5} + 10x_{b5} \leq 10$$

Untuk i=b, j=6,

$$10x_{b6} + 10x_{b6} \leq 10$$

Untuk i=c, j=1,

$$7x_{c1} + 7x_{c1} \leq 10$$

Untuk i=c, j=2,

$$7x_{c2} + 7x_{c2} \leq 10$$

Untuk i=c, j=3,

$$7x_{c3} + 10x_{c3} \leq 10$$

Untuk i=c, j=4,

$$7x_{c4} + 7x_{c4} \leq 10$$

Untuk i=c, j=5,

$$7x_{c5} + 10x_{c5} \leq 10$$

Untuk i=c, j=6,

$$10x_{c6} + 10x_{c6} \leq 10$$

Sehingga *master problem* dari permasalahan penjadwalan perawat tersebut adalah sebagai berikut:

Maksimumkan $(3x_{a1} + 4x_{a2} + 2x_{a3} + 2x_{a4} + 0x_{a5} + x_{a6})$+$(x_{b1} + 0x_{b2} + 2x_{b3} + x_{b4} + 3x_{b5} + 4x_{b6})$+$(x_{c1} + x_{c2} + 0x_{c3} + 3x_{c4} + 2x_{c5} + x_{c6})$

Terhadap

$$x_{a1} + x_{a2} + x_{a3} + x_{a4} + x_{a5} + x_{a6} = 1$$

$$x_{b1} + x_{b2} + x_{b3} + x_{b4} + x_{b5} + x_{b6} = 1$$

$$x_{c1} + x_{c2} + x_{c3} + x_{c4} + x_{c5} + x_{c6} = 1$$

$$x_{a3} + x_{a3} \leq 1$$

$$x_{b5} + x_{b5} \leq 1$$

$$x_{c6} + x_{c6} \leq 1$$

$$x_{a6} + x_{a6} \leq 1$$

$$x_{b3} + x_{b3} \leq 1$$

$$x_{c5} + x_{c5} \leq 1$$

$$x_{a2} + x_{a2} \leq 1$$

$$x_{b4} + x_{b4} \leq 1$$

$$x_{c4} + x_{c4} \leq 1$$

$$x_{a1} + x_{b1} + x_{c1} = 1$$

$$x_{a2} + x_{b2} + x_{c2} = 1$$

$$x_{a3} + x_{b3} + x_{c3} = 1$$

$$x_{a4} + x_{b4} + x_{c4} = 1$$

$$x_{a5} + x_{b5} + x_{c5} = 1$$

$$x_{a6} + x_{b6} + x_{c6} = 1$$

$$x_{a1} + x_{b2} + x_{c1} = 1$$

$$x_{a2} + x_{b4} + x_{c2} = 1$$

$$x_{a3} + x_{b6} + x_{c3} = 1$$

$$x_{a4} + x_{b3} + x_{c4} = 1$$

$$x_{a5} + x_{b1} + x_{c5} = 1$$

$$x_{a6} + x_{b5} + x_{c6} = 1$$

$$x_{a3} + x_{b1} + x_{c3} = 1$$
$$x_{a1} + x_{b6} + x_{c1} = 1$$
$$x_{a2} + x_{b3} + x_{c2} = 1$$
$$x_{a3} + x_{b1} + x_{c3} = 1$$
$$x_{a4} + x_{b5} + x_{c4} = 1$$
$$x_{a6} + x_{b2} + x_{c6} = 1$$
$$7x_{a1} + 7x_{a1} \leq 10$$
$$7x_{a2} + 7x_{a2} \leq 10$$
$$7x_{a3} + 10x_{a3} \leq 10$$
$$7x_{a4} + 7x_{a4} \leq 10$$
$$7x_{a5} + 10x_{a5} \leq 10$$
$$10x_{a6} + 10x_{a6} \leq 10$$
$$7x_{b1} + 7x_{b1} \leq 10$$
$$7x_{b2} + 7x_{b2} \leq 10$$
$$7x_{b3} + 10x_{b3} \leq 10$$
$$7x_{b4} + 7x_{b4} \leq 10$$
$$7x_{b5} + 10x_{b5} \leq 10$$
$$10x_{b6} + 10x_{b6} \leq 10$$
$$7x_{c1} + 7x_{c1} \leq 10$$
$$7x_{c2} + 7x_{c2} \leq 10$$
$$7x_{c3} + 10x_{c3} \leq 10$$
$$7x_{c4} + 7x_{c4} \leq 10$$
$$7x_{c5} + 10x_{c5} \leq 10$$
$$10x_{c6} + 10x_{c6} \leq 10$$
$$x_{a1}, x_{a2}, x_{a3}, x_{a4}, x_{a5}, x_{a6}, x_{b1}, x_{b2}, x_{b3}, x_{b4}, x_{b5}, x_{b6}, x_{c1}, x_{c2}, x_{c3}, x_{c4}, x_{c5}, x_{c6} \in \{0,1\}$$

Setelah membentuk model matematika penjadwalan perawat, selanjutnya *master problem* akan diselesaikan dengan pendekatan *column generation*.

Iterasi Pertama (RMP1)

Inisialisasi dalam menyelesaikan *master problem* adalah dengan membentuk *Restricted Master Problem* (RMP), yaitu *master problem* yang hanya menggunakan pola pada J', dengan $J' \subset J$, di mana J adalah himpunan semua pola penjadwalan yang feasible. Salah satu caranya adalah memilih secara acak kolom yang mungkin mengoptimalkan fungsi tujuan.

Misalkan pilih tiga pola secara acak dari tiap perawat. Misalkan untuk perawat a, pola yang terpilih adalah pola ke-1, ke-2, dan ke-3, untuk perawat b adalah pola ke-3, ke-5, dan ke-6, untuk perawat c adalah pola ke-2, ke-4,dan ke-5, maka didapatkan untuk RMP1 dengan membentuk LP relaksasi yaitu sebagai berikut:

Maksimumkan $(3x_{a1} + 4x_{a2} + 2x_{a3})$+$(2x_{b3} + 3x_{b5} + 4x_{b6})$+$(x_{c2} + 3x_{c4} + 2x_{c5})$

Terhadap

$$x_{a1} + x_{a2} + x_{a3} = 1$$
$$x_{b3} + x_{b5} + x_{b6} = 1$$
$$x_{c2} + x_{c4} + x_{c5} = 1$$
$$x_{a3} + x_{a3} \leq 1$$
$$x_{b5} + x_{b5} \leq 1$$
$$x_{b3} + x_{b3} \leq 1$$
$$x_{c5} + x_{c5} \leq 1$$
$$x_{a2} + x_{a2} \leq 1$$
$$x_{c4} + x_{c4} \leq 1$$
$$x_{a1} = 1$$
$$x_{a2} + x_{c2} = 1$$
$$x_{a3} + x_{b3} = 1$$
$$x_{c4} = 1$$
$$x_{b5} + x_{c5} = 1$$
$$x_{b6} = 1$$
$$x_{a1} = 1$$
$$x_{a2} + x_{c2} = 1$$
$$x_{a3} + x_{b6} = 1$$
$$x_{b3} + x_{c4} = 1$$
$$x_{c5} = 1$$
$$x_{b5} = 1$$
$$x_{a3} = 1$$

$$x_{a1} + x_{b6} = 1$$
$$x_{a2} + x_{b3} + x_{c2} = 1$$
$$x_{a3} = 1$$
$$x_{b5} + x_{c4} = 1$$
$$7x_{a1} + 7x_{a1} \leq 10$$
$$7x_{a2} + 7x_{a2} \leq 10$$
$$7x_{a3} + 7x_{a3} \leq 10$$
$$7x_{b3} + 10x_{b3} \leq 10$$
$$7x_{b5} + 10x_{b5} \leq 10$$
$$10x_{b6} + 10x_{b6} \leq 10$$
$$7x_{c2} + 7x_{c2} \leq 10$$
$$7x_{c4} + 7x_{c4} \leq 10$$
$$7x_{c5} + 10x_{c5} \leq 10$$
$$x_{a1}, x_{a2}, x_{a3}, x_{a4}, x_{a5}, x_{a6}, x_{b1}, x_{b2}, x_{b3}, x_{b4}, x_{b5}, x_{b6}, x_{c1}, x_{c2}, x_{c3}, x_{c4}, x_{c5}, x_{c6} \geq 0$$

Dari model matematika tersebut, dengan menggunakan metode simpleks didapat solusi terkini untuk RMP1 dengan nilai fungsi tujuan adalah 7 dan nilai variabel $x_{a2},\ x_{a1}, x_{b6}, x_{b5}, x_{c4}, x_{c5}$ = 1 dan variabel yang lain bernilai nol.

Selanjutnya diberikan variabel dual u_i, e_{idj}, f_{idj} , g_{idj} , v_{dt} , w_{ij} pada kendala-kendala RMP1 tersebut. Sehingga didapatkan masalah dual untuk RMP1 berikut:

Minimumkan $(u_1 + u_2 + u_3)+(e_{163} + e_{265})+(f_{263} + f_{365}) + (g_{152} + g_{354}) + (v_{11} + v_{12} + v_{13} + v_{21} + v_{22}+v_{23} + v_{31} + v_{32} + v_{33} + v_{41} + v_{42} + v_{43} + v_{51} + v_{52} + v_{53} + v_{61} + v_{62} + v_{63}) + (10w_{11} + 10w_{12} + 10w_{13} + 10w_{23} + 10w_{25} + 10w_{26} + 10w_{32} + 10w_{34} + 10w_{35})$

Terhadap

$$u_1 + v_{11} + v_{31} + v_{52} + 14w_{11} \geq 3$$
$$u_1 + 2g_{152} + v_{12} + v_{32} + v_{53} + 14w_{12} \geq 4$$
$$u_1 + 2e_{163} + v_{13} + v_{33} + v_{51} + v_{61} + 14w_{13} \geq 2$$
$$u_2 + 2f_{263} + v_{13} + v_{41} + v_{53}+17w_{23} \geq 2$$
$$u_2 + 2e_{265} + v_{22} + v_{43} + v_{62}+17w_{25} \geq 3$$
$$u_2 + v_{23} + v_{33} + v_{52}+20w_{26} \geq 4$$
$$u_3 + v_{12} + v_{32} + v_{53} + 14w_{32} \geq 1$$

$$u_3 + 2g_{354} + v_{21} + v_{41} + v_{62} + 17w_{34} \geq 3$$
$$u_3 + 2f_{365} + v_{22} + v_{42} + 17w_{35} \geq 2$$

Dari model dual tersebut didapatkan solusi dual dengan nilai fungsi tujuan adalah 7 dan nilai variabel $w_{11}, w_{12}, w_{13}, w_{23}, w_{25}, w_{26}$= 0,2,1,1,1,0, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{21}, v_{22}, v_{23}, v_{31}, v_{32}, v_{33},v_{41}, v_{42}, v_{43},v_{51}, v_{52}, v_{53}, v_{61}, v_{62}, v_{63}= 0, $u1$, $u2$, $u3$ = 3,3,0.

Karena solusi primal RMP1 sama dengan solusi dual RMP1, maka solusi primal RMP1 merupakan solusi optimal untuk RMP1. Untuk mengetahui apakah solusi optimal RMP1 juga merupakan solusi optimal MP, akan dibentuk *subproblem* tiap MK:

a) *Subproblem* perawat a

$\dot{v}_{dt}$ = min (0 0 0 0 0 0) $-$ (2 0 1 1 2 0)

$\dot{w}_{dt}$ = (0 2 1 1 1 0)

z_{dt} = $\dot{v}_{dt}$ + $\dot{w}_{dt}$ = (-2 2 0 0 -1 0)

Alokasi waktu untuk perawat a minimumnya dipilih slot-waktu 1 dan 5 dengan nilai minimum Ma = -3. Karena nilai Ma + u_1= (-3) + (3) = 0, maka solusi optimal sudah terpenuhi untuk perawat a .

b) *Subproblem* perawat b

$\dot{v}_{dt}$ = min (0 0 0 0 0 0) $-$ (0 1 2 1 0 2)

$\dot{w}_{dt}$ = (0 2 1 1 1 0)

z_{dt} = $\dot{v}_{dt}$ + $\dot{w}_{dt}$ = (0 1 -1 1 1 -2)

Alokasi waktu untuk perawat b minimumnya dipilih slot-waktu 3 dan 6 dengan nilai minimum Mb = -3. Karena nilai Mb + u_2= (-3) + (3) = 0, maka solusi optimal sudah terpenuhi untuk perawat b .

c) *Subproblem* perawat c

$\dot{v}_{dt}$ = min (0 0 0 0 0 0) $-$ (0 2 1 1 1 0)

$\dot{w}_{dt}$ = (0 2 1 1 1 0)

z_{dt} = $\dot{v}_{dt}$ + $\dot{w}_{dt}$ = (0 0 0 0 0 0)

Alokasi waktu untuk perawat c minimumnya dipilih di sembarang slot-waktu dengan nilai minimum Mc = 0. Karena nilai Mc + u_3= 0 + 0 = 0, maka solusi optimal sudah terpenuhi untuk perawat c .

Karena *reduced cost* tiap variabel tidak ada yang bernilai negatif maka solusi optimal RMP1 juga merupakan solusi *master problem*.

Dengan kata lain, untuk perawat a pola yang dipilih adalah pola ke-2, yaitu slot-waktu 1 dan 5, untuk perawat 2 adalah pola ke-6, yaitu slot-waktu 3 dan 6, untuk perawat c adalah pola ke-4, yaitu slot-waktu 2 dan 5. Sehingga penjadwalan tiga perawat untuk contoh tersebut adalah seperti tercantum di Tabel 3.3:

Tabel 3.3 Hasil Penjadwalan Tiga Perawat

Perawat	**Senin**	**Selasa**
1	P	S
2	M	M
3	S	P

ket: P = pagi, S = Siang, M = Malam

Dari Tabel 3.3 tersebut dapat dilihat bahwa setiap perawat dijadwalkan satu *shift* setiap harinya, perawat bekerja maksimal 20 jam. Selain itu, nilai pemilihan slot-waktu untuk perawat pertama, yaitu slot-waktu slot-waktu 1 dan 5 bernilai 2. Untuk perawat kedua, yaitu slot-waktu ke-3 dan 6 bernilai 2 dan perawat ketiga yaitu slot-waktu ke-2 bernilai 2, slot-waktu ke-4 bernilai 1. Hasil yang didapat bahwa pemilihan waktu oleh perawat terpenuhi semaksimal mungkin di mana hampir seluruh jadwal yang didapat memiliki nilai pemilihan slot-waktu bernilai 2. Karena memenuhi seluruh pemilihan slot-waktu yang diinginkan, maka dapat disimpulkan jadwal yang didapatkan untuk penjadwalan tiga perwat tersebut adalah optimal.